I. Définition et premières propriétés

a. Vocabulaire

Définition : On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont on ne prédire le résultat.

Exemple : lancer une pièce de monnaie, un dé, le tirage du loto, la durée de vie d'un appareil électronique sont des expériences aléatoires.

Définition : On appelle **issue** d'une expérience aléatoire un résultat de celle-ci.

Définition : On appelle **univers** et on note Ω (Oméga) l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple : Lorsqu'on lance
- une pièce de monnaie les issues sont PILE ou FACE, et
$\Omega = \{PILE\,;FACE\}$
- un dé à 6 faces (cubique) les issues sont les nombres de 1 à 6, et
$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Définition : On appelle **évènement** un sous ensemble de l'univers Ω.

Remarque : on dit que Ω est **l'évènement certain**.

Exemple : Lorsqu'on lance un dé cubique, un évènement A est : « faire un nombre paire » et on note $A = \{2\,;4\,;6\}$, un évènement B est « obtenir 6 » et on note $B = \{6\}$.

Définition : On appelle **évènement élémentaire** un évènement formé d'une seule issue de Ω.

Remarque : B est un évènement élémentaire car il n'est constitué que d'une seule issue.

Problématique : comment définir une probabilité pour être en accord avec les différents exemples abordés en cours ?

b. Probabilité

Définition : La fréquence de réalisation d'une issue, lorsqu'une expérience aléatoire est reproduite un très grand nombre de fois, se stabilise autour d'un nombre p.
p est la **probabilité** de l'issue.

Exemples :
La probabilité d'obtenir $FACE$ lorsqu'on lance une pièce de monnaie est de $\frac{1}{2}$; on note $p(FACE) = \frac{1}{2}$.
La probabilité de l'évènement B « obtenir 6 lorsqu'on lance un dé » est de $\frac{1}{6}$; on note $p(6) = \frac{1}{6}$ ou $p(B) = \frac{1}{6}$.

Propriétés (conséquences immédiates déduites de la définition de fréquence) :
- La probabilité d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1.
- La probabilité de l'univers Ω est 1.
- La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires (ou issues) de Ω est égale à 1.

Exemple : L'évènement « obtenir un nombre entre 1 et 6 lorsqu'on lance un dé » est l'évènement certain Ω, donc sa probabilité est égale à 1.

II. Equiprobabilité

Définition : Si les évènements élémentaires ont tous la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables.

Propriété : La probabilité d'un évènement élémentaire est :

$$p = \frac{1}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

La probabilité d'un évènement A est :

$$p = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

Exemple : Tirage d'une carte de cœur dans un jeu de 32 cartes est $p(\text{coeur}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

III. Intersection (∩) et réunion (∪) d'évènements.

Définitions :
L'évènement $A \cap B$ (A inter B) est formé des issues qui réalisent à la fois A et B.
L'évènement $A \cup B$ (A union B) est formé des issues qui réalisent A ou B.

✍ **Propriété** : La probabilité de l'**union** de deux événements A **ou** B est donnée par la formule :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B).$$

Exemple : On lance un dé cubique bien équilibré, soit A et B les évènements :

A : « Obtenir un nombre impair » (noté $A = \{1\,;3\,;5\}$)

B : « Obtenir un 3 ou un 6 » (noté $B = \{3\,;6\}$)

Alors l'évènement $A \cup B$ est : « Obtenir un nombre impair ou un 6», c'est-à-dire $A = \{1\,;3\,;5\,;6\}$, il est constitué de 4 issues équiprobables donc sa probabilité $p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; et l'événement $A \cap B$ est : « obtenir un 3 » c'est-à-dire $B = \{3\}$ de probabilités $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

La calcul en utilisant la formule précédente donne :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Représentation : Afin de modéliser le dénombrement de ces évènements, on représente les situations dans des tableaux d'effectif ou avec des diagrammes de Venn (les pommes de terres).

IV. Evènements incompatibles, évènements contraire

a. Evénements incompatibles

✍ **Définition** : On dit que deux évènements sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. On note $A \cap B = \emptyset$ (le vide).

Exemple : On lance un dé cubique bien équilibré, soit A et B les évènements :

A : « Obtenir un nombre impair » (noté $A = \{1\,;3\,;5\}$)

B : « Obtenir un 6 » (noté $B = \{6\}$)

Il est impossible que les évènements se réalise en même temps. Donc l'évènement $A \cap B$ noté $\emptyset$ est appelé **événement impossible**.

✍ **Propriété** : La probabilité de deux évènements incompatibles est nulle. $(p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0)$

b. Evénement contraire

✍ **Définition** : On appelle contraire d'un évènement A l'événement noté $\bar{A}$ (A barre) l'ensemble des événements qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

Remarque : $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ d'où on déduit la propriété suivante :

✍ **Propriété** : La probabilité de l'événement contraire est :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$