Définition en terme de Primitive

Exercice 24
En utilisant la formule des primitives, donner une valeur exacte des intégrales suivantes :

1. $I = \int_{-1}^{0} \left(t^3 + 2t^2 - 1\right) \mathrm{d}t$;
2. $J = \int_{0}^{2} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$;
3. $K = \int_{-2}^{1} t\left(2t^2 + 1\right) \mathrm{d}t$;
4. $L = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \mathrm{e}^{2t+1} \mathrm{d}t$;
5. $M = \int_{-2}^{1} \sqrt{t+3} \mathrm{d}t$;
6. $N = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 4t \mathrm{d}t$;
7. $P = \int_{0}^{1} \frac{1}{(2t+1)^2} \mathrm{d}t$;
8. $Q = \int_{0}^{2} t\mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 25
Même exercice

1. $R = \int_{3}^{5} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t + 1} \mathrm{d}t$;
2. $S = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{12}} \cos^3 t \sin t \mathrm{d}t$;
3. $T = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 t}{t} \mathrm{d}t$;
4. $U = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan t \mathrm{d}t$;
5. $V = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \mathrm{d}t$;
6. $W = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t \ln t} \mathrm{d}t$;
7. $X = \int_{0}^{1} \frac{1 + \mathrm{e}^t}{t + \mathrm{e}^t} \mathrm{d}t$;
8. $Y = \int_{1}^{2} (t+1)\sqrt{t+1} \mathrm{d}t$.

Exercice 26
Calculer les intégrales suivantes où x et t sont des réels :

1. $\int_{0}^{2} x \mathrm{d}x$;
2. $\int_{0}^{2} t \mathrm{d}x$;
3. $\int_{0}^{2} t \mathrm{d}t$.

Exercice 27
Soit le fonction $f : x \mapsto \frac{3x+1}{x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que :
$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$
2. Calculer $\int_{2}^{3} f(x) \mathrm{d}x$.

Exercice 28
Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2x-3}{(x-3)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que :
$$f(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2}.$$
2. Calculer $\int_{-1}^{0} f(x) \mathrm{d}x$.

Exercice 29
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :
$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 1}{x+1}.$$

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que :
$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}.$$
2. Calculer $\int_{-3}^{-2} f(x) \mathrm{d}x$.

Exercice 30
Calculer astucieusement les intégrales suivantes :

1. $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \sin x \mathrm{d}x$;
2. $\int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{9\pi}{5}} \sin x \mathrm{d}x$;
3. $\int_{-\frac{\pi}{7}}^{\frac{13\pi}{7}} \cos x \mathrm{d}x$;
4. $\int_{-\frac{25\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x$.

Intégration par parties

Exercice 31
À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$;
2. $\int_{1}^{\mathrm{e}} x \ln x \mathrm{d}x$;
3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \mathrm{d}x$;
4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x-1) \sin x \mathrm{d}x$;
5. $\int_{1}^{\mathrm{e}} \ln x \mathrm{d}x$;
6. $\int_{1}^{2} x^2 \ln x \mathrm{d}x$;
7. $\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{2} \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$;
8. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (x+1) \ln x \mathrm{d}x$.

Exercice 32
Même exercice.

1. $\int_{-1}^{1} x^2 \sin x \mathrm{d}x$;
2. $\int_{0}^{\pi} (x+1) \cos x \mathrm{d}x$;
3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (t^2+1) \cos t \mathrm{d}t$;
4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2t-1) \sin t \mathrm{d}t$.

Exercice 33
Soit la fonction $f : t \mapsto x \ln(x^2+1)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout réel x :
$$f(x) = u(x)v'(x),$$
avec $u(x) = \ln(x^2+1)$ et $v(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$.
2. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{1} f(x) \mathrm{d}x$.

Déterminer une primitive

Rappel de cours :
Soit f une fonction **intégrable sur un intervalle** I **contenant** a.
La primitive de f qui s'annule en a est alors la fonction F, définie sur I par $F(x) = \int_{a}^{x} f(t) \mathrm{d}t$.

Pour calculer ces intégrales, on utilise éventuellement une intégration par parties.

Exercice 34

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive sur I qui s'annule en a des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x\sin x, I = \mathbb{R}, a\dfrac{\pi}{2}$;
2. $g : t \mapsto \ln t, I =]0\,;\,+\infty[, a = \mathrm{e}$;
3. $h : t \mapsto t\mathrm{e}^t, I = \mathbb{R}, a = \ln 2$.

Exercice 35

Soient les intégrales :

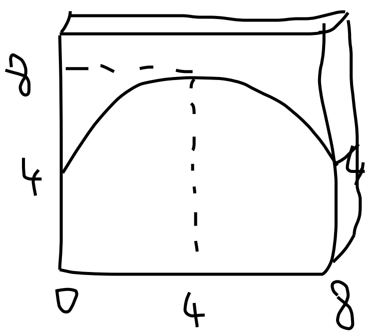
$$I = \int_0^x \mathrm{e}^t \cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^x \mathrm{e}^t \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $I + J$, puis $I - J$, à l'aide d'une double intégration par parties.
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \cos^2 x$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x \sin^2 x$.

Valeur Moyenne

Activité

Théo a eu une fourmilière pour noël. Il a dessiné le schéma ci-dessous pour essayer de résoudre sont problème. Il se demande à quel niveau sera le sable si on le lisse.



Aidez Théo à résoudre son problème.

Exercice 36

Soit $i(t) = 5\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ une intensité de courant variable en fonction du temps t.

1. Déterminer la période T de cette fonction.
2. Calculer la valeur moyenne de i sur une période.

Exercice 37

Suite à un début de maladie infectieuse dans une région, on a constaté que le nombre de personnes ayant contracté la maladie n jours après l'apparition des premiers cas est donnée pour $0 \leqslant n \leqslant 25$ par :

$$f(n) = 45n^2 - n^3.$$

Calculer le nombre moyen de personnes malades durant les huit premiers jours.

Exercice 38

Valeur efficace d'un transfert d'énergie

À toute grandeur périodique de période T, on associe en physique sa valeur efficace $V = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T x(t)^2\,\mathrm{d}t}$ où $\displaystyle\int_T x(t)^2\mathrm{d}t$ désigne l'intégrale de $x(t)^2$ sur un intervalle quelconque de longueur T.

1. Si x est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T, expliquer pourquoi on n'a pas besoin de préciser l'intervalle de longueur T choisi pour calculer X.
2. On considère une tension donnée par $u(t) = A\cos(\omega t)$, où A est un réel positif.
   a. Justifier que u est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
   On admet que pour tout α réel, on a :
   $$\cos^2 alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$
   b. En déduire le calcul de la valeur efficace de u.
   c. Expliquer le commentaire suivant : ≪pour une grandeur sinusoïdale, sa valeur efficace est sa valeur crête divisée par $\sqrt{2}$≫

Exercice 39

Puissance et intensité efficace

Si la puissance P d'un système est constante pendant un temps Δt, l'énergie qu'il fournit pendant Δt est $\Delta W = P\Delta t$.
On admet que, lorsque la puissance fournit par un système $t \mapsto P(t)$ est une fonction continue sur l'intervalle $[t_1\,;\,t_2]$ est $W = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} P(t)\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'énergie calorifique dépensée pendant une période T dans une résistance R traversée par un courant alternatif d'intensité $i = I_m \sin(\omega t)$, sachant que la puissance calorifique est à l'instant t, $P(t) = Ri^2$.
2. On définit l'intensité efficace I_e comme étant l'intensité continue qui, dans la même résistance, pendant la même durée T, produirait la même énergie calorifique.
   a. Montrer que $I_e^2 = \displaystyle\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t$ avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
   I_e^2 est donc la valeur moyenne de i^2 sur $[0\,;\,T]$.
   b. Calculer $\displaystyle\int_0^T \sin^2(\omega t)\mathrm{d}t$.
   c. Montrer que $I_e = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$.