Probabilité conditionnelle

Exercice 1
Le tableau suivant donne la répartition des 1 250 élèves d'un lycée selon leur classe et leur participation à l'atelier d'arts plastiques proposé dans l'établissement.

	Seconde	Première	Terminale
participent à l'atelier	70	28	24
ne participent pas	430	322	376

1. On choisit un élève de seconde au hasard.
   Quelle est la probabilité pour qu'il suive l'atelier d'arts plastiques ?
2. On choisit un élève du lycée au hasard.
   a. Construire un arbre pondéré schématisant la situation.
   b. Quelle est la probabilité que cet élève suive l'atelier d'arts plastiques ?
   c. Sachant que l'élève désigné suit l'atelier, quelle est la probabilité qu'il soit en classe de première ?

Exercice 2
Dans un lot de pièces, on sait que 5 % sont défectueuses. La procédure de contrôle des pièces en sortie de fabrication n'est pas parfaite :
• 4 % des pièces saintes sont rejetées ;
• 2 % des pièces défectueuses sont acceptées.
On choisit au hasard une pièce en sortie de fabrication.
quelle est la probabilité que :

1. la pièce soit rejetée ;
2. la pièce soit saine et acceptée ;
3. il y ait une erreur de contrôle ;
4. la pièce soit saine sachant qu'elle est refusée ;
5. la pièce soit défectueuse sachant qu'elle est acceptée.

Exercice 3
Dans un grand restaurant, on a constaté que 15 % des clients mangent ≪ à la carte ≫ et 85 % choisissent un menu. Parmi les client choisissant la formule ≪ à la carte ≫, 30 % prennent un dessert, contre 45 % des clients choisissant un menu.

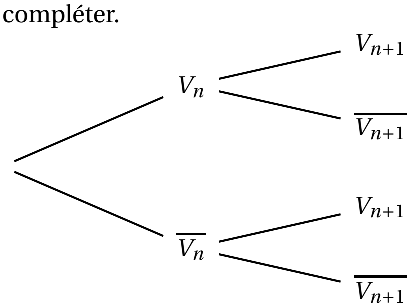
1. On interroge au hasard un client de ce grand restaurant.
   a. Quelle est la probabilité que ce soit un client ayant mangé à la carte et pris un dessert ?
   b. Quelle est la probabilité que ce soit un client ayant pris un dessert ?
2. On interroge au hasard un client qui a pris un dessert. Quelle est probabilité qu'il ait choisit la formule ≪ à la carte ≫ ?

Exercice 4
Dans une station service, il y a trois pompes A, B et C qui délivrent chacune du gazole et du sans-plomb.
Une enquête statistique sur la clientèle a permis d'établir que sur 1 000 clients, 400 vont se servir à la pompe A, 350 se servent à la pompe B et les autres à la pompe C.
• Lorsqu'un client est à la pompe A, la probabilité qu'il prenne du gazole est 0,5.
• Lorsqu'un client est à la pompe B, la probabilité qu'il prenne du gazole est 0,4.
• Lorsqu'un client est à la pompe C, la probabilité qu'il prenne du gazole est 0,5.
On admet que si le client ne prend pas du gazole, alors il prend du sans plomb.
On définit les évènements suivants :
• A : ≪ le client se sert à la pompe A ≫ ;
• B : ≪ le client se sert à la pompe B ≫ ;
• C : ≪ le client se sert à la pompe C ≫.
On note G l'évènement ≪ le client prend du gazole ≫.

1. Traduire les données de l'énoncé par un arbre de probabilités ; indiquer les différentes probabilités sur les branches de cet arbre.
2. Un client se présente à la station. Montrer que la probabilité qu'il prenne du gazole est égale à 0,545.
3. Un client a pris du gazole. Calculer la probabilité qu'il se soit présenté à la pompe A.
4. Dix client se présentent à la station, on suppose que leurs choix sont indépendants. Calculer la probabilité qu'ils soient aussi nombreux à prendre du gazole que du sans-plomb.

Exercice 5
Dans un pays imaginaire, la probabilité qu'un habitant transmette fidèlement une information reçue est de $\frac{4}{5}$, celle qu'il dise exactement le contraire est de $\frac{1}{5}$.
Un jour, une certaine information, vraie à l'origine, se répand de bouche à oreille parmi les habitants de ce pays. On désigne par V_n l'événement : ≪ l'information transmise par la n^{ième} personne est vraiegg et on note p_n la probabilité V_n.

1. a. Illustrer la transmission d'information au stade des n^{ième} et n+1^{ièmes} personnes , par un arbre de probabilités, tel que celui donné ci-dessous, à compléter.



   b. Justifier que $P_1 = \frac{4}{5}$ et montrer que $p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \frac{1}{2}$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
   b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (p_n)$ et interpréter.

Exercice 6
Un joueur tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes et gagne s'il obtient un as. Mais on admet qu'un joueur sur trois est un tricheur et que pour un tricheur, la probabilité d'obtenir un as est égale à 1.

1. Un joueur tire une carte : quelle est la probabilité que ce soit un as ?
2. Un joueur tire une carte et c'est un as : quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

Exercice 7
Une agence de voyage propose exclusivement trois destinations que l'on désigne par A, G et M.
50 % des clients choisissent la destination A ;
30 % des clients choisissent la destination G ;
20 % des clients choisissent la destination M.
Au retour de leu voyage, tous les client de l'agence répondent à une enquête de satisfaction qui montre que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même 80 % des clients ayant choisi la destination G.
On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.
On note les évènements :
A : ≪ le client a choisi la destination A≫ ;
G : ≪ le client a choisi la destination G≫ ;
M : ≪ le client a choisi la destination M≫ ;
S : ≪ le client a choisi la destination S≫ ;

1. Illustrer l'énoncé avec un arbre de probabilité.
2. **a.** Traduire par une phrase les évènement $G \cap S$ et $M \cap S$, puis leur probabilités.
   b. L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. Calculer $P(A \cap S)$.
   c. En déduire la probabilité conditionnelle $P_A(S)$.
3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible, puis une valeur approchée).

Indépendance de deux évènements

Exercice 8
Soient A et B deux évènements indépendants tels que
$P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$
Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 9
Soient A et B deux évènements tels que

$$P_B(A) = 0,4, P(B) = 0,5 \text{et} P(A \cup B) = 0,7$$

A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 10
Dans une entreprise, trois machine A, B, C fabriquent des ampoules électriques dans les proportions 10 %, 50 % et 40 % respectivement.
Dans les productions respectives des machines, A, B, C, on compte 20 %, 8 % et 10 % d'ampoules défectueuses.
On teste une ampoule prélevée au hasard dans la production journalière de l'usine : elle fonctionne.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriqué par la machine A ? B ? C ?
2. Justifier, sans nouveau calcul, que les évènements C : ≪l'ampoule provient de C≫ et D : ≪ l'ampoule est défectueuse≫ sont indépendants.

Loi binomiale

Exercice 11
Dans une région pétrolifère, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.

1. Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.
2. On effectue 9 forages.
   a. Quelle hypothèse doit-on formuler pour pouvoir assimilé cette répétition de 9 épreuves de Bernoulli à un schéma de Bernoulli .
   b. Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole.
   En donner une valeur approché à 10^{-3} près.
   c. Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de forages conduisant à une nappe de pétrole.

   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Donner des valeurs approchées des probabilités $P(X = k)$ à 10^{-3} près pour $0 \leqslant k \leqslant 9$.
   c. Combien de forages gagnants peut-on espérer en moyenne sur les 9 forages effectués ?

Exercice 12
Un constructeur de composants produit des résistances.
La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale) 5×10^{-3}.

1. Dans un lot de 1 000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir :
   a. exactement deux résistance défectueuses ?
   b. au plus deux résistances défectueuses ?
   c. au moins deux résistances défectueuses ?
2. Dans un lot de 1 000 résistances, quel nombre de résistances défectueuses peut-on craindre en moyenne ?

Exercice 13
Un élève se rend en voiture au lycée distant de 12 km de son domicile à une vitesse supposé constante de 60 km/h. Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolore non synchronisé. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit vert est de $\frac{2}{3}$ et celle qu'il soit au rouge ou à l'orange est de $\frac{1}{3}$. Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire donnant le temps en minutes mis par l'élève pour se rendre au lycée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. **a.** Exprimer T en fonction de X.
   b. Déterminer $E(T)$ et interpréter le résultat.
3. L'élève part 17 minutes avant le début des cours
   a. Peut-il espérer être à l'heure ?
   b. Calculer le probabilité qu'il arrive en retard.

Exercice 14
Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles anfin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jours pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Un trajet coute 10 ;euroos ; en cas de fraude, l'amende est de 100 euros. Théo fraude systématiquement lors des 40 trajet étudiés. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où théo a été contrôlé.

1. On suppose que $p = 0,05$.
   a. Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité que Théo soit contrôler au plus 2 fois.
   b. Soit Z la variables aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
   Justifier l'égalité $Z = 400 - 110X$. Calculer $E(X)$.
2. **a.** La fraude systématique de Théo est-elle favorable ou non pour Théo ?
   b. Pour quelles valeurs de p en serait-il autrement ?

Exercice 15
Une boite contient 1 jeton noir, 2 jetons rouges et 3 jetons jaunes. L'expérience consiste à effectuer n tirages d'un jeton de cette boite, avec remise ($n \geqslant 2$). Soit N et R les variables aléatoires donnant les nombres de jetons noirs et rouges, lors de ces n tirages.

1. **a.** Déterminer les lois de probabilité de N et de R.
   b. Donner leurs espérances et leurs variances.
2. Soit S la variable aléatoire indiquant le nombre de jetons noirs ou rouges obtenus lors des n tirages.
   a. Montrer que S suit une loi binomiale ; en précisant les paramètres. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.
   b. Comment s'exprime S en fonciton de N et R ?
   c. A-t-on $E(N+R) = E(N)+E(R)$? A-t-on $V(N+R) = V(N)+V(R)$?

Révision

Exercice 16
Une machine fabrique un très grand nombre de pièces d'un même modèle.
Partie A
Les résultats approchés seront donnés à 10^{-2} près.
On admet que la proportion de pièces conformes dans la production d'une journée est de 90%. On prélève au hasard un lot de 50 pièces dans la production pour vérification de l'épaisseur. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire prenant le nombre de pièces non conformes dans ce lot.

1. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux pièces non conformes dans ce lot.

Partie B
Pour améliorer sa production, l'usine achète une deuxième machine.
On sait que 40% des pièces sont fabriquées par la première machine M_1, les autres pièces étant fabriquées par la nouvelle machine M_2.
Par ailleurs, 90% des pièces fabriquées par la machine M_1 sont conformes. De plus, une étude faite sur la production journalière globale de l'usine a montré que 6% des pièces produites sont non conformes.
On prélève au hasard une pièce dans la production journalière globale de l'usine.
On définit les événements suivants :
• A : « La pièce prélevée provient de la machine M_1. »
• $\bar{A}$: « La pièce prélevée provient de la machine M_2. »
• C : « La pièce est conforme. »

1. Montrer que la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 et soit non conforme est $0,04$.
2. Recopier et compléter avec des probabilités, le tableau suivant :

	C	$\overline{C}$	
A			
$\overline{A}$			
		0,06	

3. Calculer la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 sachant que cette pièce est conforme.
4. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Intégrales et Primitives

Exercice 17

A la calculatrice tracer et donner une valeur approchée des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{7}^{0}\left(x^2+3x-1\right)\mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{1+t}{t^2+1}\mathrm{d}t.$
4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin(t)\mathrm{d}t.$

Exercice 18

Déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=-4x+5$
2. $f(x)=5x^2-x$
3. $f(t)=t^3-2t+4$
4. $f(t)=\frac{1}{3}t^2-4t+2$

Exercice 19

Déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$
2. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$
3. $f(t)=\sin(2t)$
4. $f(t)=\cos(3t+2)$

Exercice 20

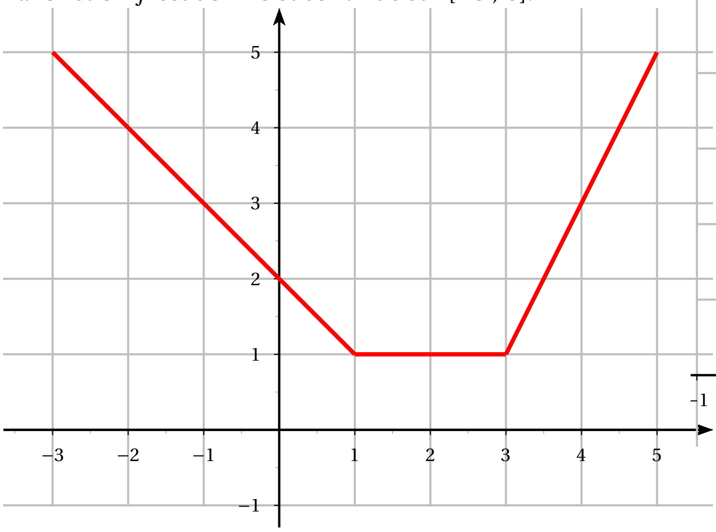
Déterminer les primitives de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. $f(x)=\frac{1}{x}$
2. $f(t)=3t^2-3t+\frac{1}{t^2}$
3. $f(t)=\frac{2t+1}{t^2+t+4}$
4. $f(t)=\dfrac{4}{(x+1)^2}$

Définition en terme d'aire

Exercice 21

La fonction f est définie et continue sur $[-3\,;\,5]$.



1. Graphiquement donner les valeurs des intégrales suivantes :

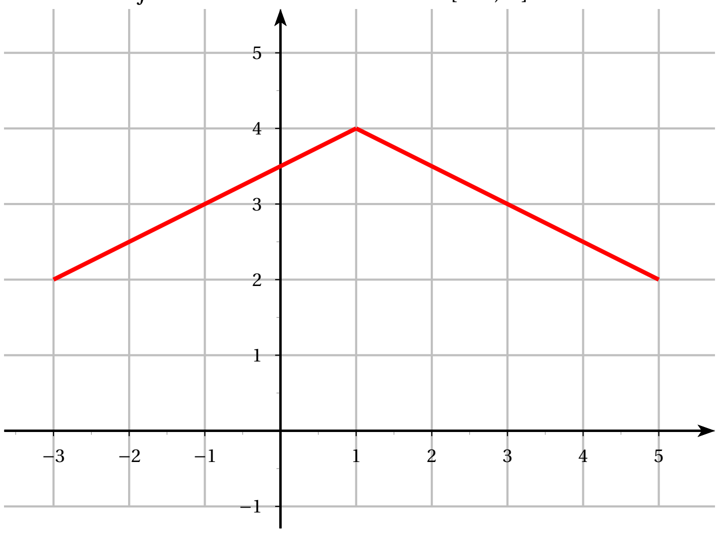
   a. $\displaystyle\int_{1}^{3}f(t)\mathrm{d}t$ b. $\displaystyle\int_{-3}^{1}f(t)\mathrm{d}t$ c. $\displaystyle\int_{3}^{5}f(t)\mathrm{d}t$

2. En déduire la valeur exacte de :

$$\int_{-3}^{5}f(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 22

La fonction f est définie et continue sur $[-3\,;\,5]$.

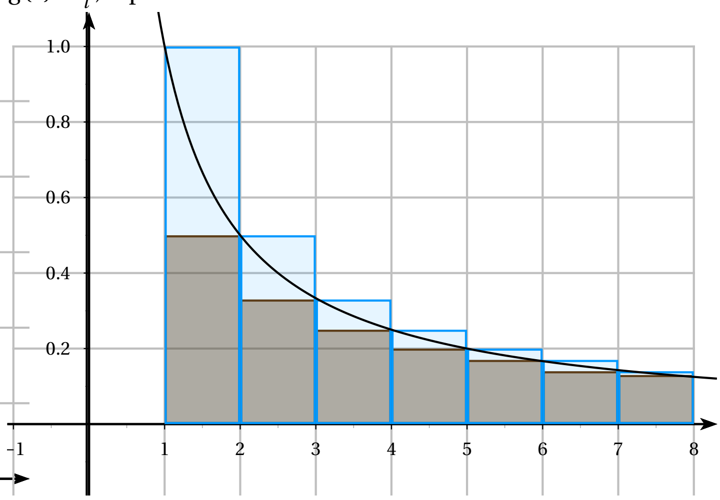


Donner les valeurs des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{-3}^{1}f(t)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{1}^{5}f(t)\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-3}^{5}f(t)\mathrm{d}t$

Exercice 23

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;\,8]$ par $g(t)=\frac{1}{t}$, représenté ci-dessous :



1. A l'aide de la figure, déterminer un encadrement de :

$$I=\int_{1}^{8}\frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

2. Par le calcul déterminer la valeur exacte de cette aire. Que pensez de l'encadrement précédemment établie.