I. Rappel des généralités sur les probabilités

a. Vocabulaire

Définition : On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont on ne prédire le résultat.
L' **issue** d'une expérience aléatoire le résultat de celle-ci.
L'**évènement** une partie de l'univers Ω.
L'**univers** noté Ω (Oméga) l'événement certain et l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.
Un **évènement élémentaire** est un évènement formé d'une seule issue de Ω.

b. Probabilité

Définition : La fréquence de réalisation d'une issue, lorsqu'une expérience aléatoire est reproduite un très grand nombre de fois, se stabilise autour d'un nombre P.
P est la **probabilité** de l'issue.

Propriétés (conséquences immédiates déduites de la définition de fréquence) :
- La **probabilité** d'un évènement **est un nombre compris entre 0 et 1.**
- La probabilité de l'univers Ω est 1.
- La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires (ou issues) de Ω est égale à 1.

II. Equiprobabilité

Définition : Si les évènements élémentaires ont tous la même probabilité, on dit qu'ils sont équiprobables.

Propriété : Dans ce cas la probabilité d'un évènement élémentaire est :

$$P = \frac{1}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

La probabilité d'un évènement A est :

$$P = \frac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

III. Intersection (∩) et réunion (∪) d'évènements.

Définitions :
L'évènement $A \cap B$ (A inter B) est formé des issues qui réalisent à la fois A et B.
L'évènement $A \cup B$ (A union B) est formé des issues qui réalisent A ou B.

Propriété : La probabilité de l'**union** de deux événements A **ou** B est donnée par la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

IV. Evènements incompatibles, évènements contraire

a. Evénements incompatibles

Définition : On dit que deux évènements sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps. On note $A \cap B = \emptyset$ (le vide).

Propriété : La probabilité de deux évènements incompatibles est nulle. $(P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0)$

b. Evénement contraire

Définition : On appelle contraire d'un évènement A l'événement noté $\bar{A}$ (A barre) l'ensemble des événements qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

Remarque : $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ d'où on déduit la propriété suivante :

Propriété : La probabilité de l'événement contraire est :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

V. Probabilité conditionnelle.

i. Activité (lien)

ii. Le Cours

Définition : Soient A et B deux évènement, B étant de probabilité non nulle.
La probabilité de A sachant que B est réalisé (on dit A sachant B) est la nombre noté $P_B(A)$ (noté parfois $P(A|B)$), défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

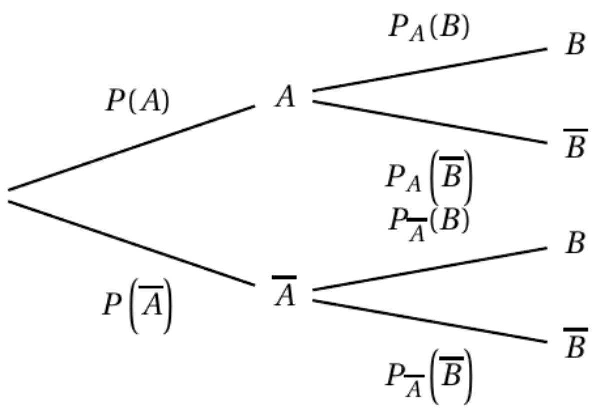
D'où on déduit les deux formules suivantes :

Propriété : Si A et B sont deux évènements de probabilités non nulles :

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) \qquad P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A).$$

VI. Probabilités conditionnelles et arbre de probabilité.

Soient A et B deux évènement, A at $\bar{A}$ étant de probabilité non nulle. Alors la probabilité des évènements conditionnelles B sachant A, $\bar{B}$ sachant A , B sachant $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sachant $\bar{A}$ se notent sur le deuxième étage des branches comme suit :



VII. Evènement indépendant.

Définition : On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Conséquences : si A et B sont indépendants alors

$$P_B(A) = P(A) \qquad \text{et} \qquad P_A(B) = P(B).$$

Propriété : Si A et B sont deux évènements indépendants, alors A et $\bar{B}$; $\bar{A}$ et B ; $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

VIII. Variable aléatoire.

a. Variable aléatoire

Définition : On appelle variable aléatoire réelle le résultat d'une expérience lorsqu'il est représenté par un nombre réel. Autrement dit, une variable aléatoire réelle est une fonction X définie sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_k \mapsto X(\omega_k) = x_i \end{cases}$$

où $X(\Omega)$ est appelé univers image : c'est l'ensemble des valeurs prises par X.

b. Loi de probabilité

Définition : Définir une loi de probabilité sur l'ensemble des n valeurs x_i, c'est associer à chaque x_i sa probabilité p_i.

c. Espérance d'une variable aléatoire

Définition : On appelle espérance d'une variable aléatoire X et on note $E(X)$ la valeur moyenne de la variable X.

Propriété : Soient X une variable aléatoire et a et b deux réels,

$$E(aX+b)=aE(X)+b.$$

d. Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition : On appelle espérance d'une variable aléatoire X et on note $V(X)$ le réel strictement positif représentant la dispersion des valeurs prises par X.

Définition : On appelle ecart-type d'une variable aléatoire X et on note $\sigma(X)$ le réel définie par $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Remarque : L'écart-type est dans la même unité que les valeurs de X.

IX. Loi binomiale

a. Epreuve de Bernoulli

Définition : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues : pile ou face, oui ou non, gagner ou perdre, etc.
On notera S le succès et E l'échec, les deux issues d'une épreuve de Bernoulli, on note en générale $P(S)=p$ et $P(E)=q=1-p$.

b. Loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

Définition : La variable aléatoire qui associe le nombre de succès d'une épreuve de Bernoulli réalisé un nombre n donné de fois de manière indépendante suit une loi binomiale.

Notation : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n le nombre de fois que l'on réalise l'épreuve de Bernoulli et p la probabilité du succès de cette épreuve.

On notera $P(X = k)$ la probabilité d'avoir k succés et $P(X \leq k)$ celle d'avoir au plus k succés.

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, pour calculer la probabilité $P(X = k)$ nous utiliserons la calculatrice :

TI 82-83

Dans le menu « DISTR » (2sd VARS)

On utilise la fonction « binompdf(»

$P(X = k) = \text{binompdf}(n, p, k)$

Dans cette dernière fenêtre entrer

n le nombre de répétition
p la probabilité du succès
et k le nombre de succès souhaités.

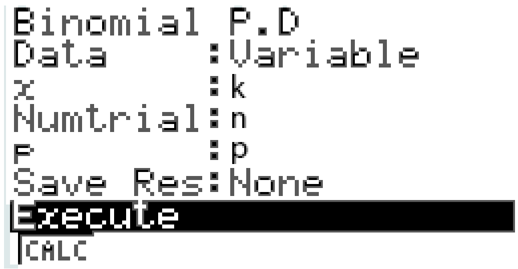
Casio

Dans l'écran d'accueil, le menu STAT

Touche F5 « DISTR »

Touche F5 « BINM» puis F1 « Bpd »

k, n et p et appuyer sur «CALC »



c. Propriété d'une variable suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

Propriété : Soient X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p ; l'espérance et la variance de la variable X est donné par les formules :

$$E(X) = n \times p,$$
$$V(X) = n \times p \times (1 - p).$$